Álgebra III

Práctica 3 - Segundo cuatrimestre de 2016
Extensiones normales, separables e inseparables

Ejercicio 1. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

i) Todo polinomio no constante se factoriza linealmente sobre algún cuerpo.

ii) El cuerpo de descomposición de un polinomio es único, salvo isomorfismos.

iii) Toda extensión de grado finito es el cuerpo de descomposición de algún polinomio.

iv) Sean $K \subseteq L \subseteq E$. Si E es el cuerpo de descomposición un polinomio $f \in K[X]$, entonces E es el cuerpo de descomposición de f visto como polinomio en $L[X]$.

Ejercicio 2. Exhibir cuerpos de descomposición, determinando su grado y sistemas de generadores, para cada uno de los siguientes polinomios sobre los cuerpos indicados:

i) $X^p - a$, sobre $\mathbb{Q}$, con $p \in \mathbb{N}$ primo y $a \in \mathbb{Q} - \mathbb{Q}^p$.

ii) $X^3 - 10$,sobre $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

iii) $X^4 - 5$, sobre $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$, $\mathbb{Q}[\sqrt{-5}]$ y $\mathbb{Q}[i]$.

iv) $X^4 + 2$, sobre $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}[i]$.

v) $\prod_{i=1}^{n}(X^2 - p_i)$, sobre $\mathbb{Q}$, con $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{N}$ primos distintos.

vi) $X^3 - 2$, sobre $\mathbb{F}_7$.

vii) $(X^3 - 2)(X^3 - 3)(X^2 - 2)$, sobre $\mathbb{Q}[\sqrt{-5}]$ y $\mathbb{F}_5$.

viii) $X^n - t$, sobre $\mathbb{C}(t)$, con t trascendente sobre $\mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$.

ix) $X^4 - t$, sobre $\mathbb{R}(t)$, con t trascendente sobre $\mathbb{R}$.

Ejercicio 3. Caracterizar los cuerpos de descomposición de los polinomios $X^3 + X^2 + X + 2$ y $X^3 + 2X + 1$ sobre $\mathbb{F}_3$. Probar que son isomorfos como extensiones de $\mathbb{F}_3$.

Ejercicio 4. Caracterizar los cuerpos de descomposición de los polinomios irreducibles de grado 2 sobre $\mathbb{F}_5$. ¿ Son isomorfos entre ellos?

Ejercicio 5. Sea E el cuerpo de descomposición de un $f \in K[X]$, con $\mathrm{gr}(f) = n$. Probar que $[E : K] \mid n!$. Mostrar ejemplos donde se cumpla la igualdad y donde no se cumpla.

Ejercicio 6. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

i) Toda extensión finita es normal.

ii) Toda extensión finita está contenida en una extensión finita normal.

iii) Toda extensión de un cuerpo de característica cero es normal.

iv) Todo K-morfismo $f : L \to L$ es un K-automorfismo.

v) Si L/K es algebraica, entonces todo K-morfismo $f : L \to L$ es un K-automorfismo.

Ejercicio 7. Sea E/K una extensión normal y sea $K \subseteq F \subseteq E$ una subextensión. Probar que todo K-morfismo de F en E puede ser extendido a un K-automorfismo de E.

Ejercicio 8. Determinar cuales de las siguientes extensiones E/K son normales. En cada caso, calcular $\mathrm{Gal}(E/K)$ y $\mathrm{Hom}_K(E, \overline{K})$.

i) $\mathbb{Q}[\sqrt[7]{5}]/\mathbb{Q}$.

ii) $\mathbb{Q}[\sqrt[7]{5}, \sqrt{5}]/\mathbb{Q}[\sqrt[7]{5}]$.

iii) $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}]/\mathbb{Q}$.

iv) $\mathbb{Q}[\xi_p]/\mathbb{Q}$, con $p \in \mathbb{N}$ primo.

Ejercicio 9. Sea $K \subseteq \mathbb{C}$ el mínimo cuerpo que contiene a todas las raíces de $X^4 + 3X^2 + 1$. Caracterizar K y calcular $[K : \mathbb{Q}]$. Hacer lo mismo con $X^4 + 2X^2 + 2$, $X^6 + 3$, $X^8 - 2$ y $X^8 - 3$.

Ejercicio 10. Sea K un cuerpo, $n \in \mathbb{N}$ y t trascendente sobre K. Probar que $K(t)/K(t^n)$ es normal si y sólo si el polinomio $X^n - 1$ se factoriza linealmente en $K[X]$.

Ejercicio 11. Sea K el cuerpo de descomposición de $X^{p^n} - X$ sobre $\mathbb{F}_p$. Calcular $[K : \mathbb{F}_p]$.

Ejercicio 12.

i) Probar que $\mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}]/\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ es normal pero $\mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}]/\mathbb{Q}$ no lo es.

ii) Exhibir extensiones normales con subextensiones no normales.

Ejercicio 13. Sea H/K una extensión algebraica y sean E/K y F/K subextensiones normales. Probar que EF/K y $(E \cap F)/K$ son normales.

Ejercicio 14. Probar que toda extensión E/K generada por elementos de grado 2 es normal. ¿Para que valores de $n \in \mathbb{N}$ vale que toda extensión de grado n sobre $\mathbb{Q}$ es normal?

Ejercicio 15. Determinar el cuerpo de descomposición de $X^4 - 10X^2 + 5$ y su grupo de Galois, sobre $\mathbb{Q}$, $\mathbb{F}_3$ y $\mathbb{F}_7$.

Ejercicio 16. Sea K un cuerpo de característica $p > 0$ y sea E/K algebraica. Sea $\alpha \in E$ tal que $\alpha^{p^j} \in K$ para algún $j \in \mathbb{N}_0$. Probar que $m(\alpha, K) = X^{p^r} - \alpha^{p^r}$, donde $r = \min\{j \in \mathbb{N}_0 \,:\, \alpha^{p^j} \in K\}$.

Ejercicio 17. Sea K un cuerpo de característica $p > 0$ y sea E/K una extensión algebraica. Sean $E_s = \{x \in E \,:\, x \text{ es separable sobre } K\}$ y $E_i = \{x \in E \,:\, x^{p^n} \in K \text{ para algún } n \in \mathbb{N}_0\}$. Probar que:

i) E_s y E_i son subcuerpos de E.

ii) E es puramente inseparable sobre E_s.

iii) $E_s \cap E_i = K$.

iv) Si E/K es normal, entonces E/E_i es separable y $E = E_s E_i$.

Ejercicio 18. Sea $p \in \mathbb{N}$ primo y sean u, v algebraicamente independientes sobre $\mathbb{F}_p$. Calcular el grado y el grado de inseparabilidad de las siguientes extensiones:

i) $\mathbb{F}_p(u, v)/\mathbb{F}_p(u^p - u, v^p - v)$.

ii) $\mathbb{F}_p(u, v)/\mathbb{F}_p(u^p, v^p - v - u)$.

Ejercicio 19. Sea K un cuerpo de característica p, y sean $\alpha, \beta \in \overline{K}$ elementos no nulos tales que α es separable sobre K y β es puramente inseparable sobre K. Probar que $K(\alpha, \beta) = K(\alpha+\beta) = K(\alpha\beta)$.

Ejercicio 20. Sea $p \in \mathbb{N}$ primo y sea $K = \mathbb{F}_p(t)$ con t trascendente sobre $\mathbb{F}_p$. Sean $r, n \in \mathbb{N}$ tales que $r < p^n$ y sea $\alpha \in \overline{K}$ una raíz de $X^{p^n} - tX^r + t \in K[X]$. Probar que el grado de inseparabilidad de $K[\alpha]/K$ es p^m donde $m = \max\{k \in \mathbb{N}_0 \ : \ p^k | r\}$.

Ejercicio 21. Sea p un primo impar y sean u, v algebraicamente independientes sobre $\mathbb{F}_p$. Consideremos $f = X^{2p} + uvX^p + v \in \mathbb{F}_p(u, v)[X]$. Sea $\alpha \in \overline{\mathbb{F}_p(u, v)}$ una raíz de f. Probar que:

i) $[\mathbb{F}_p(u, v)[\alpha] : \mathbb{F}_p(u, v)] = 2p$.

ii) $\mathbb{F}_p(u, v)[\alpha]/\mathbb{F}_p(u, v)$ no es separable ni puramente inseparable.

iii) $\mathbb{F}_p(u, v)[\alpha]/\mathbb{F}_p(u, v)$ no es normal.

Sea E el cuerpo de descomposición de f sobre $\mathbb{F}_p(u, v)$. Calcular $[E : \mathbb{F}_p(u, v)]$.

Ejercicio 22. Sea p un primo impar y consideremos $K = \mathbb{F}_p(t)$ con t trascendente sobre $\mathbb{F}_p$. Sea α una raiz de $f = X^{p^3} - tX^p + t \in K[X]$. Sea L la clausura normal de la clausura separable de $K(\alpha)/K$. Hallar $[L : K]$.

Ejercicio 23. Sea K un cuerpo de característica p. Dentro de una clausura algebraica $\overline{K}$ de K, definimos $K^{p^{-\infty}} = \{x \in \overline{K} \ : \ \sigma(x) = x \, \forall \sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)\}$. Probar que:

i) Si $p = 0$, entonces $K^{p^{-\infty}} = K$.

ii) Si $p > 0$, entonces $K^{p^{-\infty}} = \{x \in \overline{K} \ : \ x^{p^n} \in K \text{ para algún } n \in \mathbb{N}_0\}$.

Ejercicio 24. Un cuerpo K de característica p se dice perfecto si $K^{p^{-\infty}} = K$.

i) Probar que todo cuerpo de característica cero es perfecto.

ii) Si K es de característica $p > 0$, entonces es perfecto si y solo si el morfismo $\sigma : K \to K$ dado por $\sigma(x) = x^p$ es un automorfismo.

iii) Probar que todo cuerpo finito es perfecto.

iv) Probar que si K no es perfecto, entonces $[K^{p^{-\infty}} : K] = \infty$.

v) $K^{p^{-\infty}}$ es perfecto y $\overline{K}/K^{p^{-\infty}}$ es separable.

vi) K es perfecto si y solo si toda extensión algebraica de K es separable.

vii) Si K es un cuerpo de característica $p > 0$, y t es trascendente sobre K, entonces $K(t)$ no es perfecto.

Ejercicio 25. Sea K un cuerpo y E/K una extensión algebraica.

i) Probar que si K es perfecto, entonces E es perfecto.

ii) Probar que si E es perfecto y E/K es separable, entonces K es perfecto.

iii) Probar que si E/K es finita y E es perfecto, entonces E/K es separable.

Ejercicio 26.

i) Sea E/K una extensión algebraica tal que todo polinomio no constante en $K[X]$ se factoriza linealmente en E. Probar que E es algebraicamente cerrado.

ii) Sea E/K una extensión algebraica tal que todo polinomio no constante en $K[X]$ tiene al menos una raíz en E. Probar que E es algebraicamente cerrado.